УДК 517.977

В. Л. Пасиков

ЗАДАЧА СБЛИЖЕНИЯ–УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРА С УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

Аннотация. Для конфликтно управляемой линейной интегродифференциальной системы Вольтерра изучены игровые ситуации наведения и сближения-уклонения. Для решения таких задач предложена некоторая модификация известной экстремальной конструкции академика Н. Н. Красовского.

Ключевые слова: интегродифференциальная система, управляющее воздействие, позиция игры, программный максимин, полунепрерывность.

Abstract. The article investigates game situations of aiming, approaching and deviating for a conflict-controlled linear integrodifferential Volterre's system. In order to solve such problems the author suggests a kind of modification of the well-known extreme construction by prof. N. Krasovsky.

Key words: integrodifferential game, control action, game position, policy maximin, semicontinuity.

Введение

В работе изучаются задачи управления системами, эволюция которых описывается линейными векторными интегродифференциальными уравнениями Вольтерра, что усложняет применение методов решения подобных задач для дифференциальных систем, развитых в [1–8]. Предлагаемые модификации этих методов используют полную память по управляющим воздействиям [2, 7, 8]. Задачи трактуются как позиционные дифференциальные игры при подходящем выборе пространства позиций.

Рассматривается управляемая система на промежутке $[0,\theta]$:

$$\dot{z}(t) = f(t) + A(t)z(t) + \int_0^t K(t,s)z(s)ds + \int_0^t B(t,s)\omega(s)ds,\ z(0) = z_0, \quad (1)$$

$$\omega(t) \in W_t \subset R^r, \quad (2)$$

где $z = z(t) \in R^n$ – n-мерный фазовый вектор в момент $t \in [0,\theta]$; $A(t)$ – матрица $n \times n$ непрерывная на $[0,\theta]$; $f(t)$ – матрица $n \times 1$, интегрируемая по Лебегу на $[0,\theta]$; $K(t,s)$ – матрица $n \times n$, непрерывная при $0 \le s \le t \le \theta$; $B(t,s)$ – непрерывная при $0 \le s \le t \le \theta$ матрица с интегрируемой по Лебегу производной по первому аргументу; $\omega(t)$ – управляющее воздействие игрока, стесненное условием (2), ее реализация $\omega[t]$, $t \in [0,\theta]$, – интегрируемая по Лебегу на $[0,\theta]$ r-мерная вектор-функция; W_t – ограниченные замкнутые выпуклые множества в R^r.

Функция $W = W(t, z(t))$, которая каждому вектору $\{t, z(t)\}$ ставит в соответствие некоторое ограниченное замкнутое выпуклое множество W r-мерного евклидова пространства R^r, называется допустимой стратегией игрока, если $W(t, z(t)) \subset W_t$ и множества $W(t, z(t))$ полунепрерывны сверху по включению на множестве возможных значений (t, z). Соответствующее управляющее воздействие $\omega(t) \in W_t$ называется допустимым.

Таким образом игрок, управляющий системой (1), распоряжается выбором значений функции $\omega(t)$.

Пусть теперь в (1) до момента t_0 управление является некоторой допустимой измеримой функцией $\omega[t], t \in [0, t_0]$, а после момента t_0 управление организуется по принципу обратной связи, тогда система (1) записывается в следующей форме:

$$\dot{z}(t) = f(t) + A(t)z(t) + \int_0^{t_0} K(t,s)z[s]ds + \int_{t_0}^{t} K(t,s)z(s)ds +$$

$$+\int_0^{t_0} B(t,s)\omega[s]ds + \int_{t_0}^{t} B(t,s)\omega(s)ds. \quad (3)$$

Правая часть (3) при любой допустимой реализации управляющего воздействия на $[t_0, t]$ удовлетворяет условию Каратеодори [1, 3, 9] и, следовательно, имеет на $[0, \theta]$ единственное абсолютно непрерывное решение, удовлетворяющее начальному условию $z(0) = z_0$. Символы $\omega[t]$, $z[t]$ означают реализации $\omega(t)$ и $z(t)$ на некотором промежутке.

По схеме из [9, с. 43] получим формулу состояния (1) в момент t с начальным условием $z(0) = z_0$.

Обозначим $k(t) = \dot{z}(t) - A(t)z(t)$, отсюда $\dot{z}(t) = k(t) + A(t)z(t)$, $z(0) = z_0$, по формуле Коши [1, с. 370] получаем:

$$z(t) = Z(t,0)z_0 + \int_0^t Z(t,s)k(s)ds, \quad (4)$$

где $Z(t,s)$ – матрица Коши системы $\dot{\alpha} = A(t)\alpha$.

Подставляем (4) и $\dot{z}(t)$ в (1) и меняем порядок интегрирования по формуле Дирихле [9, с. 38]:

$$k(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)Z(s,0)dsz_0 +$$

$$+\int_0^t\left[\int_s^t K(t,\tau)Z(\tau,s)d\tau\right]k(s)ds+\int_0^t B(t,s)\omega(s)ds. \quad (5)$$

Пусть $\Phi(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)Z(\tau,s)d\tau$, тогда $\Phi(t,0)=\int_0^t K(t,\tau)Z(\tau,0)d\tau$, $\varphi(t)=f(t)+\Phi(t,0)z_0$, подставляем в (5):

$$k(t)=\varphi(t)+\int_0^t \Phi(t,s)k(s)ds+\int_0^t B(t,s)\omega(s)ds. \quad (6)$$

Соотношение (6) является линейным интегральным уравнением Вольтерра; аналогично [10, с. 133] обозначим $\Psi(t,s)=E+\int_s^t R(t,\tau)d\tau$, где $R(t,\tau)$ – резольвента матрицы $\Phi(t,\tau)$, E – единичная матрица; тогда решение (6) записывается согласно [11] следующим образом:

$$K(t)=\Psi(t,0)\varphi(0)+\int_0^t \Psi(t,s)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\left[\Psi(t,s)B(s,s)+\int_s^t \Psi(t,\tau)\frac{\partial B(\tau,s)}{\partial\tau}d\tau\right]\omega(s)ds. \quad (7)$$

Далее обозначаем

$$\chi(t,s)=\Psi(t,s)B(s,s)+\int_s^t \Psi(t,\tau)\frac{\partial B(\tau,s)}{\partial\tau}d\tau$$

и подставляем в (7):

$$y_i(t)=\Psi(t,0)\varphi_i(0)+\int_0^t \Psi(t,s)d\varphi_i(s)+\int_0^t \chi(t,s)\omega_i(s)ds;$$

теперь $k(t)$ подставляем в (4) и меняем порядок интегрирования:

$$z(t)=Z(t,0)z_0+\int_0^t Z(t,s)\Psi(s,0)ds\varphi(0)+$$

$$+\int_0^t\left[\int_s^t Z(t,\tau)\Psi(\tau,s)d\tau\right]d\varphi(s)+\int_0^t\left[\int_s^t Z(t,\tau)\chi(\tau,s)d\tau\right]\omega(s)ds. \quad (8)$$

Теперь, предполагая, что до момента t_0, $0\le t_0<\theta$, реализовалось некоторое допустимое управление $\omega[t]$, а после t_0 будет $\omega[t]\equiv 0$, получаем состояние системы (1) в момент θ, которое обозначаем символом $z(\theta,t_0)$:

$$z(\theta,t_0)=Z(\theta,0)z_0+\int_0^\theta Z(\theta,s)\Psi(s,0)ds\varphi(0)+$$

$$+\int_0^\theta\left[\int_s^\theta Z(\theta,\tau)\Psi(\tau,s)d\tau\right]d\varphi(s)+\int_0^{t_0}\left[\int_s^\theta Z(\theta,\tau)\chi(\tau,s)d\tau\right]\omega[s]ds;$$

тогда состояние системы (1) в момент t, $t_0\le t<\theta$, определяется формулой

$$z(\theta,t_0)=z(\theta,t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[\int_s^\theta Z(\theta,\tau)\chi(\tau,s)d\tau\right]\omega(s)ds. \tag{9}$$

Пара $\{t,z(\theta,t)\}$, $t_0\le t<\theta$, называется позицией игры; $\{t_0,z(\theta,t_0)\}$ – начальная позиция.

Пусть l_0 – n-мерный числовой вектор, у которого после m-й координаты приписаны нули, $m\le n$, тогда согласно [1, с. 387] получаем $\{l_0' z(\theta,t)\}=\alpha(t)$ – решение дифференциального уравнения $\dot{\alpha}=-A'(t)\alpha$ с краевым условием $\alpha(\theta)=l_0$, штрих означает транспонирование.

Покроем отрезок $[t_0,\theta]$ системой полуинтервалов $[\tau_i,\tau_{i+1})$, $(i=0,1,...,n-1;\ \tau_0=t_0,\tau_n=\theta)$, δ_j – диаметр покрытия, отвечающий j-му разбиению.

В каждый момент τ_i управляющее воздействие выбирается из условия $\omega(\tau_i)\in W_{\tau_i}$. Символом $z(t)_\Delta$ обозначим решение системы

$$\dot{z}(t)=f(t)+A(t)z(t)+\int_0^t K(t,s)z(s)ds+\int_0^{t_0}B(t,s)\omega[s]ds+$$

$$+\int_{\tau_0}^{\tau_1}B(t,s)\omega(\tau_0)ds+\int_{\tau_1}^{\tau_2}B(t,s)\omega(\tau_1)ds+...+\int_{\tau_{n-1}}^{t}B(t,s)\omega(\tau_{n-1})ds. \tag{10}$$

Его состояние $z(\theta,t)_\Delta$ в момент t согласно (9):

$$z(\theta,t)_\Delta=z(\theta,t_0)+\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left[\int_s^\theta Z(\theta,\tau)\chi(\tau,s)d\tau\right]\omega(\tau_0)ds+$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_s^\theta Z(\theta,\tau)\chi(\tau,s)d\tau\right]\omega(\tau_1)ds+...+\int_{\tau_{n-1}}^{t}\left[\int_s^\theta Z(\theta,\tau)\chi(\tau,s)d\tau\right]\omega(\tau_{n-1})ds. \tag{11}$$

Определение 1. Движением системы (1), порожденным стратегией $W(t,z(t))$, из позиции $(t_0,z(\theta,t_0))$ называется всякая абсолютно непрерывная функция $z[t]$, для которой на отрезке $[0,\theta]$ найдется подпоследовательность $z[t]_\Delta$ последовательности (11), равномерно сходящаяся на $[0,\theta]$ к $z[t]$ при условии $j \to +\infty$ $(\delta_j \to 0)$.

При неограниченном измельчении разбиений получаем последовательность решений (11) пошагового уравнения (10). Согласно [12, с. 9] последовательность (11) на $[0,\theta]$ равностепенно непрерывна, а сумма конечного числа интегралов суммируемых функций равномерно ограничена. По теореме Арцела [12], множество движений, удовлетворяющих определению 1, не пусто.

1. Игровая задача сближения–уклонения для линейных интегродифференциальных систем Вольтерра

Рассматривается динамическая система, которая складывается из двух управляемых объектов, движения которых на $[0,\theta]$ описываются уравнениями типа (1)

$$\dot{x}(t) = f_1(t) + A_1(t)x(t) + \int_0^t K_1(t,s)x(s)\,ds + \int_0^t B_1(t,s)u(s)\,ds,\ x(0) = x_0; \quad (12)$$

$$\dot{y}(t) = f_2(t) + A_2(t)y(t) + \int_0^t K_2(t,s)y(s)\,ds + \int_0^t B_2(t,s)v(s)\,ds,\ y(0) = y_0; \quad (13)$$

$$u(t) \in U_t \in R^{r_1},\ v(t) \in V_t \in R^{r_2}. \quad (14)$$

Игра рассматривается на заданном промежутке, плата изображается равенством

$$\gamma(\theta) = \left\| \{y(\theta)\}_m - \{x(\theta)\}_m \right\|, \quad (15)$$

$\|\bullet\|$ – символ евклидовой нормы; символ $\{z\}_m$ обозначает вектор, составленный из первых m координат вектора z, остальные координаты равны нулю.

Первый игрок распоряжается выбором управления $u(t) \in U_t$ и стремится минимизировать величину $\gamma(\theta)$ на траекториях $x[t]$, $0 \le t \le \theta$, в паре с любой допустимой интегрируемой реализацией $v[t]$, $0 \le t \le \theta$, управления второго игрока.

Цель второго игрока, который распоряжается выбором управления $v(t) \in V_t$, противоположна и состоит в максимизации величины (4) на траекториях $y[t]$, $0 \le t \le \theta$, в паре с любой допустимой интегрируемой реализацией $u[t]$, $0 \le t \le \theta$, управления второго игрока.

Состояния систем (12), (13) записываются аналогично (9):

$$x(\theta,t)=x(\theta,t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{s}^{\theta}X(\theta,\tau)\chi_1(\tau,s)\,d\tau\right]u(s)\,ds\,;$$

$$y(\theta,t)=y(\theta,t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{s}^{\theta}Y(\theta,\tau)\chi_2(\tau,s)\,d\tau\right]v(s)\,ds\,.$$

Определение 2. Тройка $p=\{t,x(\theta,t),y(\theta,t)\}$ называется позицией игры в момент t, $t_0\le t<\theta$, $0\le t_0<\theta$; $p_0=\{t_0,x(\theta,t_0),y(\theta,t_0)\}$ – начальная позиция игры [1–3], а также [13].

Из определения 2 вытекает, что области достижимости [1, с. 399] систем (12) и (13) в момент θ из начальной позиции $p_0=\{t_0,x(\theta,t_0),y(\theta,t_0)\}$ состоят из всех точек соответственно:

$$x(\theta)=x(\theta,t_0)+\int_{t_0}^{\theta}\left[\int_{s}^{\theta}X(\theta,\tau)\chi_1(\tau,s)\,d\tau\right]u[s]\,ds\,,$$

$$y(\theta)=y(\theta,t_0)+\int_{t_0}^{\theta}\left[\int_{s}^{\theta}Y(\theta,\tau)\chi_2(\tau,s)\,d\tau\right]v[s]\,ds\,, \tag{16}$$

$u[t]$, $v[t]$, $t_0\le t\le\theta$, – всевозможные допустимые реализации управляющих воздействий.

Из вида формул (16) вытекает, что все свойства областей достижимости, установленные в [1], имеют место и в рассматриваемом случае. Для вычисления позиции требуется полная память по управлениям.

Определение 3. Стратегией $U(V)$ первого (второго) игрока будем называть многозначное отображение, которое каждой реализовавшейся позиции $p=\{t,x(\theta,t),y(\theta,t)\}$, $t_0\le t<\theta$, ставит в соответствие некоторое непустое множество [1]:

$$U=U\big(t,x(\theta,t),y(\theta,t)\big)\div u\big(t,x(\theta,t),y(\theta,t)\big)\subset U_t\,,$$

$$V=V\big(t,x(\theta,t),y(\theta,t)\big)\div v\big(t,x(\theta,t),y(\theta,t)\big)\subset V_t\,.$$

Реализации допустимых управлений являются измеримыми селекторами многозначных стратегий U и V существующими согласно теореме об измеримом выборе [3, с. 55].

Уточним постановку задач для обоих игроков.

Задача 1. Среди допустимых стратегий U первого игрока найти стратегию U^e, которая при любом допустимом способе управления второго игрока для любой начальной позиции $p_0=\{t_0,x(\theta,t_0),y(\theta,t_0)\}$, $0\le t_0\le\theta$, гарантирует результат игры

$$\left(\gamma(\theta)\Big|t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0), U^e, v\right) \le \varepsilon_0\left(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right).$$

Задача 2. Среди допустимых стратегий V второго игрока найти стратегию V^e, которая при любом допустимом способе управления первого игрока для любой начальной позиции $p_0 = \left\{t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right\}$, $0 \le t_0 < \theta$, гарантирует результат игры

$$\left(\gamma(\theta)\Big|t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0), u, V^e\right) \ge \varepsilon_0\left(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right).$$

Здесь $\varepsilon_0\left(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right)$, $0 \le t_0 < \theta$, – программный максимин для начальной позиции p_0, который определяется согласно (16) формулой [1, с. 131]:

$$\varepsilon_0\left(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right) = \max_{\|l\|=1}\left\{\int_{t_0}^{\theta} \max_{v(s)=v\in V_s}\left[\int_s^{\theta} l'Y(\theta,\tau)\chi_2(\tau,s)\,d\tau\right]v(s)\,ds - \right.$$

$$\left. -\int_{t_0}^{\theta} \max_{u(s)=u\in U_s}\left[\int_s^{\theta} l'X(\theta,\tau)\chi_1(\tau,s)\,d\tau\right]u(s)\,ds + l'\left(y(\theta,t_0) - x(\theta,t_0)\right)\right\}, \quad (17)$$

если $\varepsilon_0\left(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right) > 0$, иначе $\varepsilon_0\left(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right) = 0$.

Аналогично [1, с. 131], говорят, что имеет место регулярный случай, если для всех позиций, которые могут встретиться в рассматриваемой игре, максимум в правой части (17) достигается на единственном векторе l_0. Иначе говорят, что случай не является регулярным. Здесь рассматривается только регулярный случай. Введем теперь в рассмотрение функцию:

$$\varepsilon\left(t, x(\theta,t), y(\theta,t)\right) = \int_{t_0}^{t}\left[\int_s^{\theta} l_0' Y(\theta,\tau)\chi_2(\tau,s)\,d\tau\right]v[s]\,ds +$$

$$+\int_t^{\theta} \max_{v(s)=v\in V_s}\left[\int_s^{\theta} l_0' Y(\theta,\tau)\chi_2(\tau,s)\,d\tau\right]v(s)\,ds - \int_{t_0}^{t}\left[\int_s^{\theta} l_0' X(\theta,\tau)\chi_1(\tau,s)\,d\tau\right]u[s]\,ds -$$

$$-\int_t^{\theta} \max_{u(s)=u\in U_s}\left[\int_s^{\theta} l_0' Y(\theta,\tau)\chi_1(\tau,s)\,d\tau\right]u(s)\,ds + l_0'\left(y(\theta,t_0) - x(\theta,t_0)\right), \quad (18)$$

где l_0' – решение задачи (17); при $t = t_0$ получаем значение $\varepsilon_0\left(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right)$.

Все свойства функций $\varepsilon\left(t, x(\theta,t), y(\theta,t)\right)$ и $l_0\left(t, x(\theta,t), y(\theta,t)\right)$, установленные в [1], имеют место и для нашего случая вследствие аналогичности формул.

Вычисляем производную:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\int\limits_t^\theta\left[l_0'Y(\theta,\tau)\chi_2(\tau,t)d\tau\right]v(t)-\max_{v\in V_t}\int\limits_t^\theta\left[l_0'Y(\theta,\tau)\chi_2(\tau,t)d\tau\right]v-$$

$$-\int\limits_t^\theta\left[l_0'X(\theta,\tau)\chi_1(\tau,t)d\tau\right]u(t)+\max_{u\in U_t}\int\limits_t^\theta\left[l_0'X(\theta,\tau)\chi_1(\tau,t)d\tau\right]u\,. \qquad (19)$$

Здесь согласно [1, с. 387] m-мерные векторы-строки $\left(l_0'X(\theta,\tau)\right)$ и $\left(l_0'Y(\theta,\tau)\right)$ – решения дифференциальных систем $\dot{\alpha}_1=-A_1'(t)\alpha_1$ и $\dot{\alpha}_2=-A_2'(t)\alpha_2$ с краевым условием l_0'.

Тогда производная $\frac{d\varepsilon}{dt}$ записывается в следующей форме [14, с. 234]:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\int\limits_t^\theta\alpha_2'(\tau)\chi_2(\tau,t)d\tau v(t)-\max_{v\in V_t}\int\limits_t^\theta\alpha_2'(\tau)\chi_2(\tau,t)d\tau v-$$

$$-\int\limits_t^\theta\alpha_1'(\tau)\chi_1(\tau,t)d\tau u(t)+\max_{u\in U_t}\int\limits_t^\theta\alpha_1'(\tau)\chi_1(\tau,t)d\tau u\,. \qquad (20)$$

Обозначим для краткости

$$x^e(t)=\int\limits_t^\theta\alpha_1'(\tau)\chi_1(\tau,t)d\tau\,,$$

$$y^e(t)=\int\limits_t^\theta\alpha_2'(\tau)\chi_2(\tau,t)d\tau\,,$$

получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=y^e(t)v(t)-\max_{v\in V_t}y^e(t)v-x^e(t)u(t)+\max_{u\in U_t}x^e(t)u\,.$$

Определение 4. Пусть m-мерный вектор l_0 в каждый момент t, $0\le t<\theta$, доставляет максимум правой части (17), тогда если позиция $p=\{t,x(\theta,t),y(\theta,t)\}$ такова, что $\varepsilon_0\left(t,x(\theta,t),y(\theta,t)\right)>0$, то с этой позицией будем сопоставлять множество $U^e\left(t,x(\theta,t),y(\theta,t)\right)\left(V^e\left(t,x(\theta,t),y(\theta,t)\right)\right)$ всех векторов $U^e\left(t,x(\theta,t),y(\theta,t)\right)\in U_{t_0}\left(V^e\left(t,x(\theta,t),y(\theta,t)\right)\in V_t\right)$, которые удовлетворяют условию

$$x^e(t)u^e(t)=\max_{u\in U_t}x^e(t)u,\left(y^e(t)v^e(t)=\max_{v\in V_t}y^e(t)v\right). \qquad (21)$$

Стратегию $U^e\left(V^e\right)$ называют экстремальной стратегией первого (второго) игрока. Из определения 4 и результатов [1] следует, что экстремальные стратегии допустимы.

Используя приведенные выше фрагменты доказательств, покажем справедливость следующих утверждений.

Теорема 1. *В регулярном случае при выборе первым игроком стратегии* $U^e = U^e\left(t, x(\theta,t), y(\theta,t)\right)$, $t_0 \le t < \theta$, $0 \le t_0 < \theta$, *описываемой определением 4, ему будет гарантирован результат игры*

$$\left\|\left\{y(\theta)\right\}_m - \left\{x(\theta)\right\}_m\right\| \le \varepsilon_0\left(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right)$$

при любом допустимом способе управления второго игрока.

Доказательство. В равенстве (20) будем считать, что первый игрок в течение всей игры применяет свою экстремальную стратегию, а второй игрок – произвольную допустимую, тогда из (20) и (21)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = y^e(t)v(t) - \max_{v\in V_t} y^e(t)v,$$

отсюда $\dfrac{d\varepsilon}{dt} \le 0$.

Таким образом, когда функция $\varepsilon(t)$ положительна, то при почти всех t, $t_0 \le t \le \theta$, она имеет неположительную производную, следовательно, функция $\varepsilon(t)$, $t_0 \le t \le \theta$, не возрастает, а значит,

$$\varepsilon\left(\theta, x(\theta,\theta), y(\theta,\theta)\right) \le \varepsilon_0\left(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right),$$

где $\varepsilon\left(\theta, x(\theta,\theta), y(\theta,\theta)\right) = \left\|\left\{y(\theta)\right\}_m - \left\{x(\theta)\right\}_m\right\|$ для случая, когда первый игрок применяет свою экстремальную стратегию, а второй игрок – произвольную допустимую.

Теорема 2. *В регулярном случае при выборе вторым игроком стратегии* $U^e = U^e\left(t, x(\theta,t), y(\theta,t)\right)$, $t_0 \le t < \theta$, $0 \le t_0 < \theta$, *описываемой определением 4, ему будет гарантирован результат игры*

$$\left\|\left\{y(\theta)\right\}_m - \left\{x(\theta)\right\}_m\right\| \ge \varepsilon_0\left(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\right)$$

при любом допустимом способе управления игрока.

Доказательство. Считаем теперь, что второй игрок в течение всей игры применяет свою экстремальную стратегию, тогда из (20), (21)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -x^e(t)u(t) + \max_{u\in U_t} x^e(t)u,$$

отсюда $\dfrac{d\varepsilon}{dt} \ge 0$.

Получаем, что когда функция $\varepsilon(t)$ положительна, то при почти всех t, $t_0 \le t \le \theta$, она имеет неотрицательную производную, следовательно, функция $\varepsilon(t)$, $t_0 \le t \le \theta$, не убывает, а значит,

$$\varepsilon\big(\theta, x(\theta,\theta), y(\theta,\theta)\big) \ge \varepsilon_0\big(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\big),$$

где $\varepsilon\big(\theta, x(\theta,\theta), y(\theta,\theta)\big) = \left\| \{y(\theta)\}_m - \{x(\theta)\}_m \right\|$ для случая, когда первый игрок применяет произвольную допустимую стратегией, а второй – свою экстремальную стратегию.

Непосредственным следствием теорем 1 и 2 является следующая теорема о седловой точке.

Теорема 3. *В регулярном случае при выборе игроками своих экстремальных стратегий* U^e, V^e, *описываемых определением 4, им будет гарантирован результат игры*

$$\left\| \{y(\theta)\}_m - \{x(\theta)\}_m \right\| = \varepsilon_0\big(t_0, x(\theta,t_0), y(\theta,t_0)\big).$$

Пример. Пусть движение управляемого объекта описывается скалярным уравнением

$$\dot{z}(t) = e^t + \int_0^t z(s)ds + \int_0^t \omega(s)ds,$$

здесь $f(t) = e^t$, $K(t,s) \equiv 1$, $A(t) \equiv 0$, $B(t,s) \equiv 1$.

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид $\dot{\alpha}(t) = 0$, тогда положим, что фундаментальная матрица $Z(t) = 1$, матрица Коши $Z(t,s) = Z(t)Z^{-1}(s) = 1$.

Далее вычисляем

$$\Phi(t,s) = \int_s^t K(t,\tau)Z(\tau,s)d\tau = \int_s^t d\tau = t - s,$$

резольвента этой матрицы определяется формулой [15]

$$R(t,s) = \mathrm{sh}(t-s) = \frac{e^{t-s} - e^{-(t-s)}}{2},$$

тогда

$$\varphi(t,s) = 1 + \frac{1}{2}\int_s^t \left(e^{t-\tau} - e^{-(t-\tau)}\right)d\tau = 1 + \frac{1}{2}\left(-e^{t-\tau}\Big|_s^t - e^{-(t-\tau)}\Big|_s^t\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-1 + e^{t-s} - 1 + e^{-(t-s)}\right) = \frac{e^{t-s} + e^{-(t-s)}}{2} = \mathrm{ch}(t-s),$$

согласно (7) $\chi(t,s)=\Psi(t,s)$, $\varphi(t)=e^t+t$, $\varphi(0)=1$.

Вычисляем теперь слагаемые в (8):

$$\int_0^t Z(t,s)\Psi(s,o)\,ds\varphi(0)=\int_0^t \frac{e^s+e^{-s}}{2}ds=\int_0^t \operatorname{ch} s\,ds=\operatorname{sh} s\,|_0^t=\operatorname{sh} t=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right);$$

$$\int_s^t Z(t,\tau)\bullet\Psi(\tau,s)\,d\tau=\int_s^t \Psi(\tau,s)\,d\tau=\int_s^t \operatorname{ch}(\tau-s)\,d\tau=\operatorname{sh}(t-s)=\frac{1}{2}\left(e^{t-s}-e^{-(t-s)}\right);$$

$$\int_0^t\left[\int_s^t Z(t,\tau)\Psi(\tau,s)\,d\tau\right]d\varphi(s)=\int_0^t \operatorname{sh}(t-s)\left(e^s+s\right)ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left(e^{t-s}-e^{-(t-s)}\right)\left(e^s+s\right)ds=\frac{1}{2}\int_0^t\left(e^t-e^{-t+2s}+se^{t-s}-se^{-(t-s)}\right)ds=$$

$$=\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}=$$

$$=t\left(\frac{1}{2}e^t-1\right)+\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}=t\left(\frac{1}{2}e^t-1\right)+\frac{1}{4}\left(e^t-e^{-t}\right)=t\left(\frac{1}{2}e^t-1\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sh}t;$$

получаем для начального условия $z(0)=1$:

$$z(t)=1+\operatorname{sh}t+\frac{1}{2}\operatorname{sh}t+t\left(\frac{1}{2}e^t-1\right)=1+\frac{3}{2}\operatorname{sh}t+t\left(\frac{1}{2}e^t-1\right)+\int_0^t \operatorname{sh}(t-s)u(s)\,ds;$$

для начального условия $z(0)=2$:

$$z(t)=2+\frac{3}{2}\operatorname{sh}t+t\left(\frac{1}{2}e^t-1\right)+\int_0^t \operatorname{sh}(t-s)v(s)\,ds.$$

Рассматриваем теперь задачу сближения двух однотипных объектов [1]:

$$\dot{x}_i(t)=e^t+\int_0^t x_i(s)\,ds+\int_0^t u(s)\,ds,\ \ x_i(0)=1,\ i=1,2;$$

$$\dot{y}_i(t)=e^t+\int_0^t y_i(s)\,ds+\int_0^t v(s)\,ds,\ \ y_i(0)=2,\ i=1,2;$$

для позиции игры получаем

$$x_i(\theta,t_0)=1+\frac{3}{2}\operatorname{sh}\theta+\theta\left(\frac{1}{2}e^\theta-1\right)+\int_0^{t_0}\operatorname{sh}(t_0-s)u[s]\,ds,$$

$$y_i\left(\theta,t_0\right)=2+\frac{3}{2}\mathrm{sh}\theta+\theta\left(\frac{1}{2}e^{\theta}-1\right)+\int\limits_0^{t_0}\mathrm{sh}\left(t_0-s\right)v[s]ds\,.$$

Будем теперь считать, что игрок, управляющий движением $x(t)$, выбирает управляющее воздействие со значениями на отрезке [2,5], а игрок, управляющий движением $y(t)$, выбирает управляющее воздействие со значениями на отрезке [3,4]. Из элементарных соображений заключаем, что экстремальный вектор l_0 имеет постоянное направление по прямой $y=x$ в направлении возрастания x и y; экстремальное управление имеет вид $\left(u_1^e,u_2^e\right)=(5,5)$, $\left(v_1^e,v_2^e\right)=(4,4)$. При таком использовании ресурсов управления первый объект догонит второй объект.

Список литературы

1. **Красовский, Н. Н.** Игровые задачи о встрече движений / Н. Н. Красовский. – М. : Наука, 1970. – 420 с.
2. **Красовский, Н. Н.** Позиционные дифференциальные игры / Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. – М. : Наука, 1974. – 456 с.
3. **Субботин, А. И.** Оптимизация гарантии в задачах управления / А. И. Субботин, А. Г. Ченцов. – М. : Наука, 1981. – 288 с.
4. **Красовский, Н. Н.** Управление динамической системой / Н. Н. Красовский. – М. : Наука, 1985. – 518 с.
5. **Осипов, Ю. С.** Дифференциальные игры систем с последействием / Ю. С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196, № 4. – С. 779–782.
6. **Осипов, Ю. С.** Альтернатива в дифференциально-разностной игре / Ю. С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197, № 5. – С. 1025–1025.
7. **Субботин, А. И.** Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью / А. И. Субботин // ДАН СССР. – 1972. – Т. 206, № 3. – С. 552–555.
8. **Субботин, А. И.** Дифференциальные игры с полной памятью. Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх / А. И. Субботин. – Свердловск, 1974. – С. 211–233.
9. **Ландо, Ю. К.** Элементы математической теории управления движением / Ю. К. Ландо. – М. : Просвещение, 1984. – 88 с.
10. **Цалюк, З. Б.** Интегральные уравнения Вольтерра. Математический анализ. Итоги науки и техники / З. Б. Цалюк. – М., 1971. – Т. 15. – С. 131–198.
11. **Винокуров, В. Р.** Некоторые вопросы теории устойчивости интегральных уравнений Вольтерра / В. Р. Винокуров // Известия вузов. Математика. – 1969. – № 6. – С. 24–34.
12. **Филиппов, А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 224 с.
13. **Пассиков, В. Л.** Экстремальное прицеливание в игре линейных систем Вольтерра / В. Л. Пасиков // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. XXII, № 5. – С. 907–909.
14. **Натансон, И. П.** Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 480 с.
15. **Краснов, М. Л.** Интегральные уравнения. Задачи и упражнения / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Т. И. Макаренко. – М. : Наука, 1976. – 215 с.

Пасиков Владимир Леонидович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа и информатики, Орловский гуманитарно-технологический институт (филиал Оренбургского государственного университитетеа)

E-mail: pasikov_fmf@mail.ru

Pasikov Vladimir Leonidovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematical analysis and informatics, Orel Humanitarian and Technological Institute (affiliated branch of Orenburg State University)

УДК 517.977

Пасиков, В. Л.

Задача сближения–уклонения для линейных интегродифференциальных систем Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла / В. Л. Пасиков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 58–70.